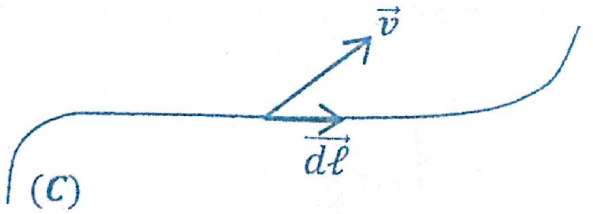
III. Potentiel électrostatique

1. Notion de circulation

La circulation du champ de vecteur $\vec{v}$ sur une courbe (C) est : $\int_{(C)} \vec{v}.\overrightarrow{d\ell}$

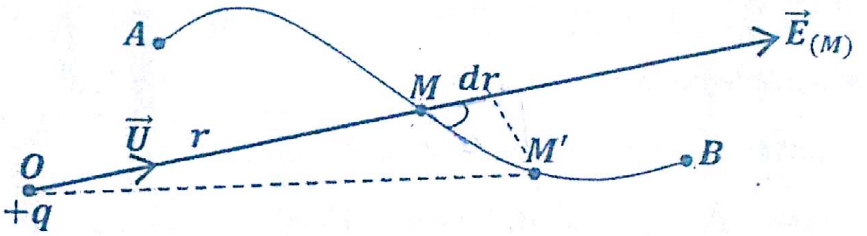


Si le champ de vecteur est le champ électrostatique $\vec{E}$ .La circulation de $\vec{E}$ sur la courbe (C) est : $\int_{(C)} \vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$

2. Expression de la fonction potentiel

a) La source de champ est une charge ponctuelle

Soit une charge q placée en O.



Au point M, le champ est : $\vec{E}_{(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$

La circulation élémentaire de $\vec{E}$ entre M et M' est : $\vec{E}.\overrightarrow{dl} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}.\overrightarrow{d\ell}$

$$\overrightarrow{MM'} = d\ell \qquad \vec{u}.\overrightarrow{d\ell} = dr$$

$$\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\left(\frac{-1}{r}\right)$$

Scanned by CamScanner

La circulation entre A et B est :

$$\int_{AB} \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_A^B d\left(\frac{-1}{r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$r_A = \overline{OA} \quad ; r_B = \overline{OB}$$

La circulation de $\vec{E}$ est conservative c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du chemin suivi.

Cette circulation ne dépendant que des points de départ et d'arrivé, sera nulle sur une courbe fermée :

$$\oint_{\substack{contour \\ fermé}} \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = 0$$

$$\int_{AB} \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = V_{(A)} - V_{(B)}$$

V est une fonction appelée potentiel électrostatique.

$$V_{(r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + C$$

Unité de V : Volte (V)

C est une constante d'intégration.

Le potentiel en un point, n'est défini qu'à une constante près.

À l'infini, on suppose qu'il n'y a pas de charges, $V(\infty) = 0$ et $C = 0$

b) La source de champ est un ensemble de charges ponctuelles

Soit q_i , une charge quelconque de cet ensemble. Elle crée en un point M situé à une distance r_i de q_i , un champ $\vec{E}_i$ et un potentiel.

L'addition vectorielle des $\vec{E}_i$ entraîne l'addition scalaire des circulations élémentaire $\vec{E}_i.\overrightarrow{dl}$.

Le potentiel total V est la somme scalaire des potentiels V_i .

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Scanned by CamScanner

c) La source de champ est une distribution continue de charges

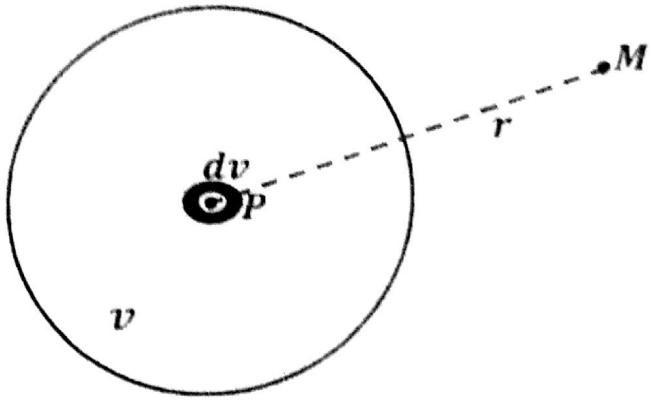
Chaque élément de la distribution porte une charge quasi ponctuelle dq.

- **Pour une distribution en volume**

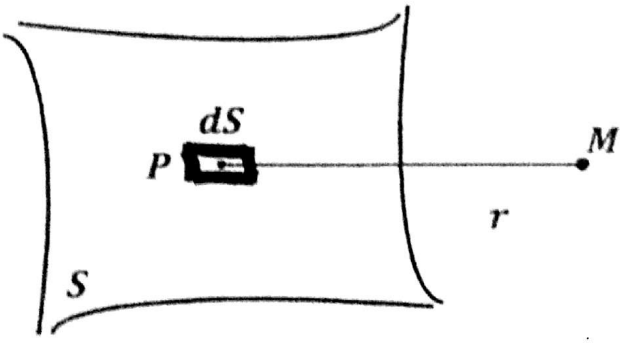
$$dq = \rho dv$$

L'addition des potentiels conduit à une intégrale triple.

$$V_{(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_v \frac{\rho_{(P)} dv}{r}$$

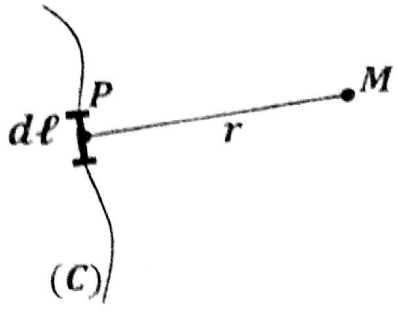


- **Pour une distribution en surface**



$$V_{(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_{(P)} dS}{r}$$

- **Pour une distribution linéaire**



$$V_{(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(C)} \frac{\lambda_{(P)} d\ell}{r}$$

Scanned by CamScanner

Remarque :

Lorsque le point M est pris à l'intérieur de la distribution $r = \overline{PM}$ peut s'annuler.

Le potentiel peut garder une valeur finie si la densité de charges est elle même finie.

3. Relation entre champ et potentiel

a) Le champ dérive de la fonction potentiel

La circulation de $\vec{E}$ le long d'une courbe AB est

$$\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = V_A - V_B = -\Delta V$$

Pour A et B voisins $\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = -dV$

Or $dV = \overrightarrow{\text{grad}}V.\overrightarrow{d\ell} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

- **En coordonnées cartésiennes**

$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \qquad \overrightarrow{d\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

- **En coordonnées cylindriques**

$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$d\ell = d_\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\,\vec{e}_\theta + d_z\vec{k}$$

- **En coordonnées sphériques**

$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{d\ell} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\vec{e}_\varphi$$

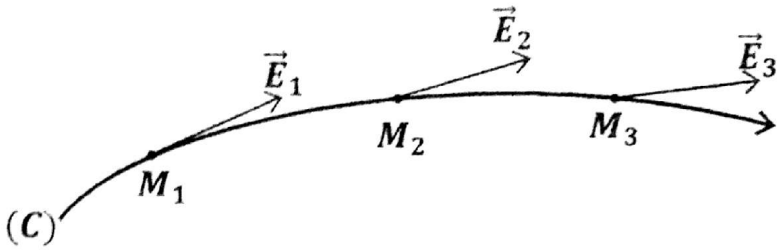
Scanned by CamScanner

b) Lignes de champ et surfaces équipotentielles

- Lignes de champ ou ligne de force

On appelle ligne de champ d'un champ électrostatique $\vec{E}$, une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur $\vec{E}$.

On convient d'orienter les lignes de champ dans le même sens que le vecteur $\vec{E}$.



Si $\overrightarrow{d\ell}$ est le vecteur déplacement élémentaire. Le fait que $\vec{E}$ soit parallèle à $\overrightarrow{d\ell}$ on a :

$$\vec{E} \wedge \overrightarrow{d\ell} = 0$$

- **En coordonnées cartésiennes**

$$\overrightarrow{d\ell} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$\vec{E} = E_x\,\vec{\imath} + E_y\,\vec{\jmath} + E_z\,\vec{k}$$

L'équation des lignes de champ est donnée par :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

- **En coordonnées cylindriques**

$$\overrightarrow{d\ell} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{k} \quad ; \quad \vec{E} = E_\rho\vec{e}_\rho + E_\theta\vec{e}_\theta + E_z\vec{k}$$

L'équation des lignes de champ est :

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

- **En coordonnées sphériques**

$$\overrightarrow{d\ell} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

Scanned by CamScanner

$$\vec{E} = E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta + E_\varphi\vec{e}_\varphi$$

L'équation des lignes de champ est :

$$\frac{d_r}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$$

- **Tubes de champ**

On appelle tube de champ ou tube de force, la surface formée par les lignes de champ qui s »appuient sur un contour fermé.

- **Surfaces équipotentielles**

Une surface équipotentielle est une surface où le potentiel a même valeur en tous ses points. Son équation est :

$$V(x, y, z) = cste$$

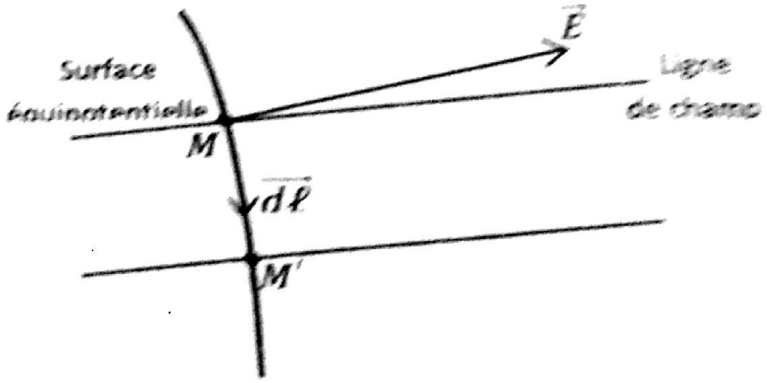
Considérons deux points et **M** et **M'** voisins et appartenant à une même surface équipotentielle.

On a : $V(M') - V(M) = -dV = \vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$

Avec $\overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{MM'}$

$dV = 0 \implies \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = 0$

$\implies \vec{E} \perp \overrightarrow{d\ell}$



$\implies$Le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire (normal) en tout point à la surface équipotentielle passant par ce point.

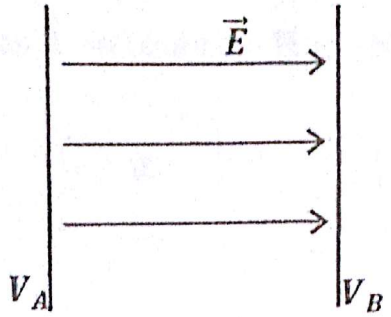
- **Orientation des lignes de champ**

La circulation de $\vec{E}$ le long d'une courbe AB est :

Scanned by CamScanner

$$\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = V_A - V_B$$

Le long de AB, $\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} > 0 \Rightarrow V_A - V_B > 0 \Rightarrow V_A > V_B$



Les lignes du champ électrostatique sont orientées dans le sens des potentiels décroissant.

- Extrémum du potentiel

Si le potentiel admet un extrémum en un point($dV = 0$) alors le champ électrostatique est nul en ce point.

$$\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = -dV = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$$

c) Rotationnel du champ $\vec{E}$

Si $\vec{E} = Ex\vec{\imath} + Ey\vec{\jmath} + Ez\vec{k}$

- $rot\,\vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial_y}E_z - \frac{\partial}{\partial_z}E_y\right)\vec{\imath} + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial_z}E_x - \frac{\partial}{\partial_x}E_z\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial_x}E_y - \frac{\partial}{\partial_y}E_x\right)$

$$\overrightarrow{gradV} = \frac{\partial V}{\partial_x}\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial_y}\vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial_z}\vec{k}$$

- $\vec{E} = -\overrightarrow{gradV} \Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial_x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial_y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial_z} \end{cases}$

$\Rightarrow rot\,\vec{E} = 0$

Conclusion :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{gradV} \Rightarrow rot\,\vec{E} = 0$$

Un vecteur $\vec{E}$ quelconque dérive d'un potentiel si en tout point : $rot\,\vec{E} = 0$

Scanned by CamScanner

3. Energie potentielle

- Travail d'une force électrostatique

Une charge q placée dans un champ $\vec{E}$ est soumise à une force $\vec{F} = q\vec{E}$

Si q se déplace entre 2 point M_1 et M_2 le travail de $\vec{F}$ est :

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{d\ell} = \int_{M_1}^{M_2} q\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = q\int_{M_1}^{M_2} \vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$$

$$W = q[\mathrm{V}(M_1) - \mathrm{V}(M_2)] = E_{P(M_1)} - E_{P(M_2)}$$

$E_{P(M_1)}$ est l'énergie potentielle que possède la charge q, placée en M_1, et soumise au potentiel $\mathrm{V}(M_1)$.

Généralement une charge q, placée en un point M où règne un potentiel $\mathrm{V}(M)$ possède une énergie potentielle :

$$E_{P(M)} = q\mathrm{V}(M)$$

- Energie d'un système de charges ponctuelles.

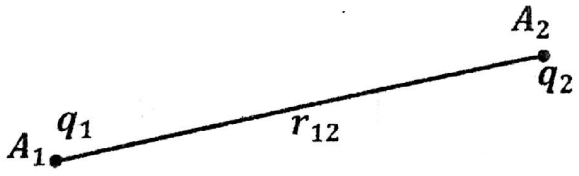
Soient n charges ponctuelles $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$ placées en $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$.

On suppose que la charge q_1 occupe la position A_1 et que toutes les autres sont placées à l'infini.

- **Amenons q_2 en A_2**

Le potentiel V_2 en A_2 est créé par la charge q_1 placée en A_1 :

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}}$$



Le travail W_2 à fournir pour amener q_2 est :

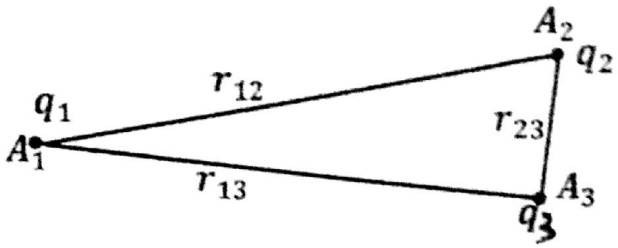
$$W_2 = q_2V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}}$$

Scanned by CamScanner

- **Amenons q_3 en A_3**

Le potentiel V_3 en A_3 est créé par q_1 placée en A_1 et q_2 placée en A_2 :

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)$$



Le travail fourni pour amener q_3 en A_3 est :

$$W_3 = q_3 V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

L'énergie du système formé par les trois charges q_1, q_2 et q_3 est :

$$W_{123} = W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

- **Amenons q_4 en A_4**

L'énergie du système formé par les 4 charges :

$$W_{1234} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}}\right)$$

- **Lorsque les n charges sont amenées à leurs positions, l'énergie du système est :**

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \sum_{j\neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Le charges sont associées deux à deux mais une seule fois. Pour cela la relation est multipliée par le facteur $^1/_2$.

On peut écrire : $$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}$$

$\sum_{j\neq i} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}$ est le potentiel V_i, au point où se trouve la charge q_i , dû à toutes les autres charges

Scanned by CamScanner

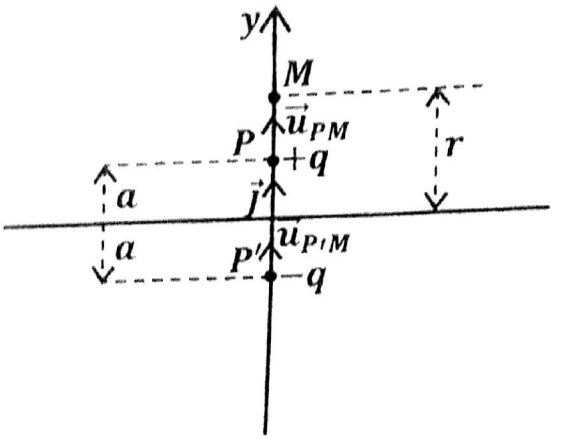
$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i$$

- **Energie d'une distribution de charges**

$$W = \frac{1}{2}\int_{distribution} V.dq$$

4. Dipôle électrique

Deux charges égales mais de signes contraires $+q$ et $-q$, placées à une certaine distance l'une de l'autre forment un dipôle électrique.



$$\vec{u}_{PM} = \vec{u}_{P'M} = \vec{j}$$

On pose $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = k$

Au point M le champ créé par :

- $+q$: $\vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r-a)^2}\ \vec{u}_{PM} = \frac{kq}{(r-a)^2}\vec{j}$
- $-q$: $\vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{(r+a)^2}\ \vec{u}_{P'M} = \frac{-kq}{(r+a)^2}\vec{j}$

Le champ total en M est :

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = kq\left[\frac{1}{(r-a)^2} - \frac{1}{(r+a)^2}\right]\vec{j}$$

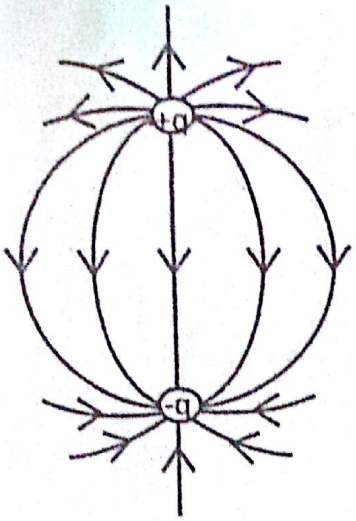
Le potentiel total en M est :

$$V = V_+ + V_- = kq\left[\frac{1}{r-a} - \frac{1}{r+a}\right]$$

Scanned by CamScanner

Généralement a est négligeable devant r :

$$\vec{E} \simeq \frac{4k\,qa}{r^3}\,\vec{j} \quad et \quad V \simeq \frac{2k\,qa}{r^2}$$

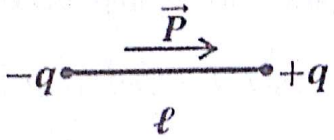


Donc le champ créé par un dipôle électrique en un point M diminue en $\frac{1}{r^3}$ et le potentiel diminue en $\frac{1}{r^2}$.

Les atomes et les molécules fournissent de nombreuses illustrations de dipôles électriques.

Ex : une molécule d'eau a un excédent de charges négatives prés de son atome d'oxygène et un excès de charges positives (égal) prés des atomes d'hydrogène. Il en résulte qu'elle se comporte comme un dipôle électrique, et plusieurs de ses propriétés physiques et chimiques sont reliées à son caractère dipolaire.

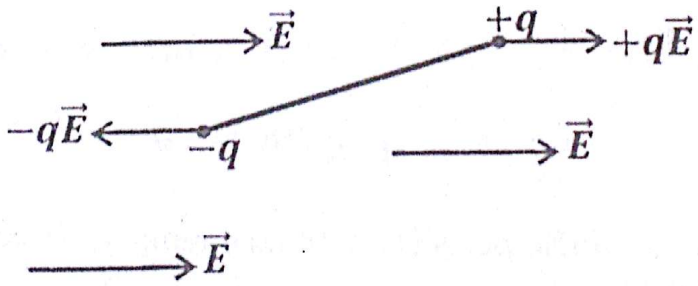
Un dipôle est caractérisé par son moment dipolaire électrique.



ℓ = distance entre $+q$ et $-q$

$\vec{P} = q\vec{\ell}$ $\quad$ $\vec{P}$ est dirigé de $-q$ vers $+q$

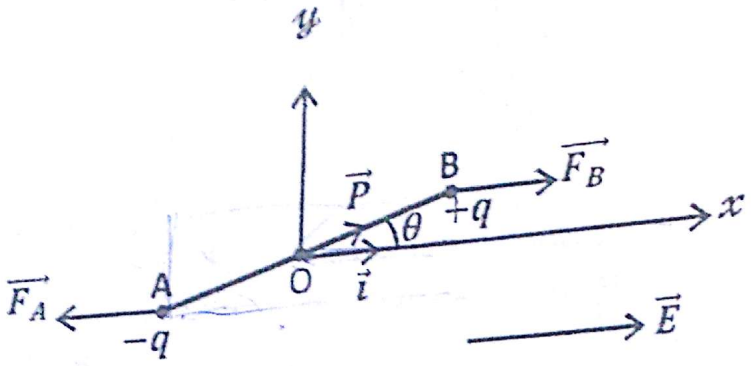
- **Dipôle placé dans un champ uniforme**



La force sur $+q$ est $+q\vec{E}$ et sur $-q$ est $-q\vec{E}$ de sorte que la force résultante sur le dipôle est nulle, lorsqu'il est placé dan un champ uniforme.

Scanned by CamScanner

- **Moment**



$\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} = 0$, la force résultante est nulle mais le moment résultant n'est pas nul.

$$\mathcal{M}\overrightarrow{F_A}/O = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A} \qquad \mathcal{M}\overrightarrow{F_B}/O = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_B}$$

$$\mathcal{M}\overrightarrow{F_A}/O + \mathcal{M}\overrightarrow{F_B}/O = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_B}$$

$$\overrightarrow{F_A} = -q\vec{E} \qquad \overrightarrow{F_B} = +q\vec{E} \qquad ; \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{total}} = \mathcal{M}\overrightarrow{F_A}/O + \mathcal{M}\overrightarrow{F_B}/O = \overrightarrow{OB} \wedge q\vec{E} + \overrightarrow{OB} \wedge q\vec{E}$$

$$2\overrightarrow{OB} = \vec{\ell} \qquad = 2\overrightarrow{OB} \wedge q\vec{E} = \vec{\ell} \wedge q\vec{E} = \vec{P} \wedge \vec{E}$$

$$|\overrightarrow{\mathcal{M}_{total}}| = PE \sin\theta$$

Le moment tend à aligner le dipôle parallèlement au champ $\vec{E}(\theta = O)$.

- **Energie potentielle du dipôle dans le champ $\vec{E}$**

$$E_P = q\,V_B - q\,V_A = q(V_B - V_A)$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V = \frac{-\partial V}{\partial x}\vec{\imath} = \frac{-\Delta V}{\Delta x}\vec{\imath} = \frac{-(V_B - V_A)}{\ell \cos\theta}\vec{\imath}$$

$$\vec{E} = E\vec{\imath} \Rightarrow V_B - V_A = -\ell\, E \cos\theta$$

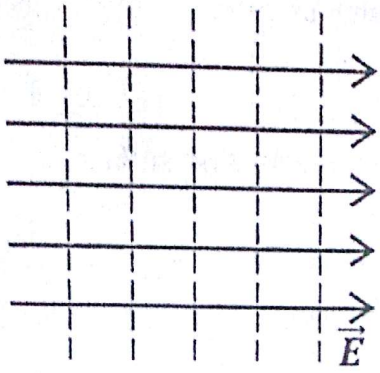
$$\Rightarrow E_P = -q\ell\, E \cos\theta = -PE\cos\theta = -\vec{P}.\vec{E}$$

L'énergie potentielle est minimum lorsque $\theta = O$

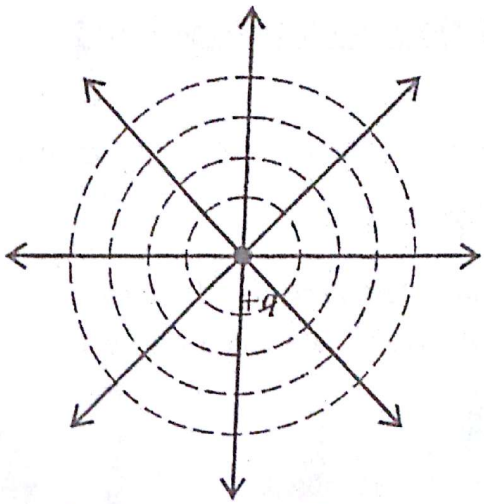
Scanned by CamScanner

$\Longrightarrow$Le dipôle est en équilibre stable lorsqu'il est parallèle à $\vec{E}$.

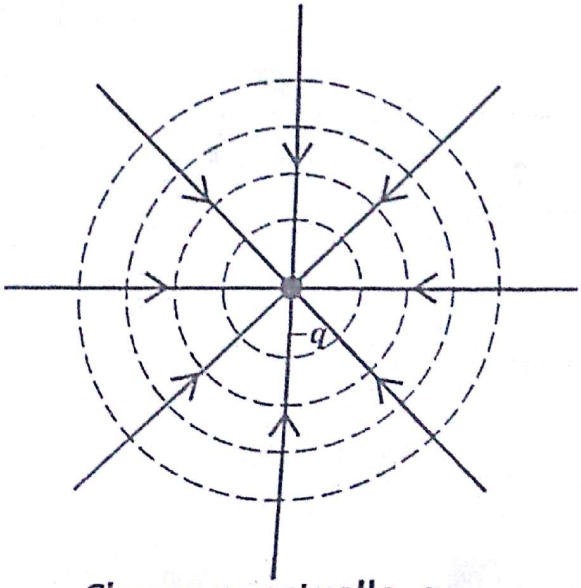
Exemples de lignes de champ $(\vec{E} \,//\, \overrightarrow{d\ell})$ et équipotentielles (V = constante).



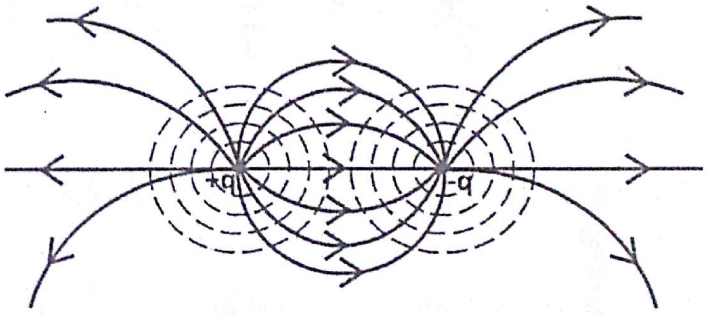
Champ uniforme



Charge ponctuelle +q



Charge ponctuelle -q



Dipôle (+q , -q)

Equipotentielle

Ligne de champ

Scanned by CamScanner

IV. Lois fondamentales de l'électrostatique

1. Flux du champ électrostatique

a) Notion d'angle solide :

L'angle solide est l'extension dans l'espace de l'angle défini dans un plan.

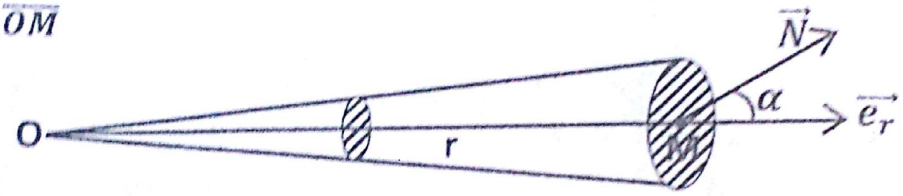
Définition :

L'angle solide élémentaire $d\Omega$, délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire dS situé à une distance r de son sommet O est :

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS}.\overrightarrow{e_r}}{r^2} = \frac{dS.\cos\alpha}{r^2}$$

$$\overrightarrow{dS} = dS\vec{N}$$

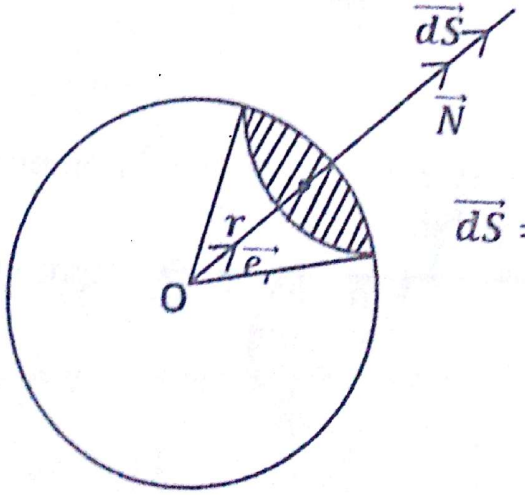
$r = \overrightarrow{OM}$



L'angle solide est toujours positif et indépendant de la distance r, son unité est le stéradian (Sr).

Lorsque dS est pris sur une sphère de centre O et de rayon r on a :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}\vec{N}.\overrightarrow{e_r}$$
$$= \frac{dS}{r^2}$$



$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{N}$$

Scanned by CamScanner

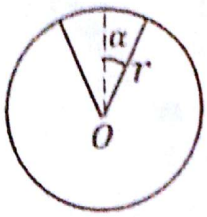
- **Espace entier :**

$$\Omega = \frac{1}{r^2}\iint dS = \frac{1}{r^2}4\pi r^2 = 4\pi \text{ stérad}$$

- **Demi-espace :**

$$\Omega = 2\pi \text{ stérad}$$

- **Cône de demi-angle au sommet α :**



En coordonnées sphériques : $dS = r^2.sin\theta.d\theta.d\varphi$

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = sin\,\theta.d\theta.d\varphi$$

$$\Omega = \int d\Omega = \int_o^{2\pi} d\varphi \int_o^{\alpha} \sin\theta\,.d\theta = 2\pi(1-\cos\alpha)$$

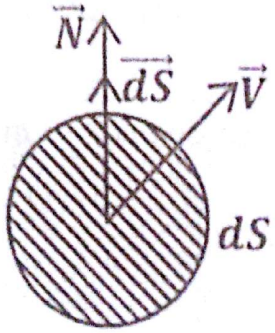
b) <u>Notion de flux :</u>

Soit un champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ est une surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$.

- **Flux élémentaire.**

On appelle « flux élémentaire » du champ $\vec{V}(M)$ à travers $\overrightarrow{dS}$ le produit scalaire :

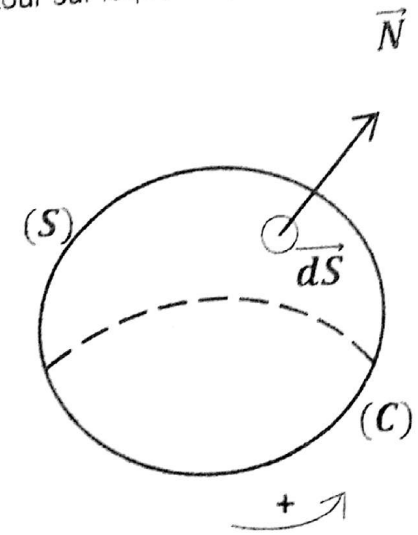
$$d\Phi = \vec{V}.\overrightarrow{dS} = \vec{V}.\vec{N}dS$$

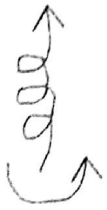


Scanned by CamScanner

- **Flux à travers une surface ouverte.**

Soit (C) le contour sur lequel s'appuie la surface (S).





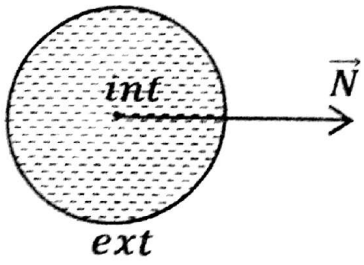
L'orientation de (C) donne le sens du vecteur unitaire $\vec{N}$ (règle du tire-bouchon).

$$\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{V}.\vec{N}\, dS$$

- **Flux à travers une surface fermée.**

Si la surface est fermée, on ne peut pas définir le contour (C).

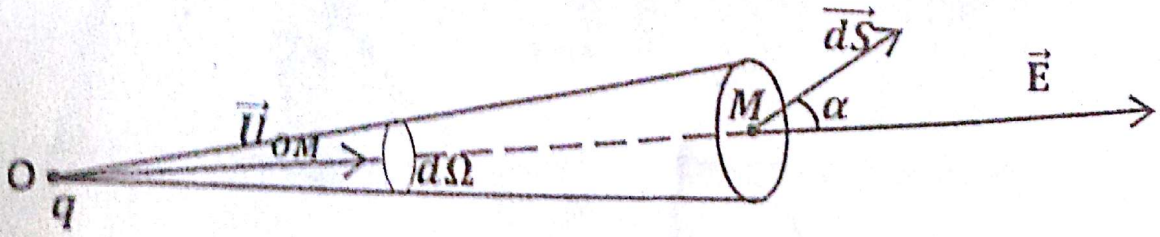
Par carvention $\vec{N}$ est orienté del'intérieur vers l'extérieur de la surface.



c) <u>Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle à travers une surface S non fermée.</u>

Soit une charge q placée en un point O et un élément de surfacedS centré en M .

Scanned by CamScanner



Au point M le champ est : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\vec{u}_{OM}$ $\qquad r = \overline{OM}$

Le flux élémentaire $\vec{E}$ de à travers dS :

$$d\phi = \vec{E}.\vec{dS} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{u}_{OM}.\vec{dS}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dS\ cos\,\alpha}{r^2}$$

Or $\frac{dS\ cos\,\alpha}{r^2}$ est l'angle solide élémentaire $d\Omega$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\,d\Omega$$

Pour une surface S ouverte, finie, limitée par un contour (C) on a :

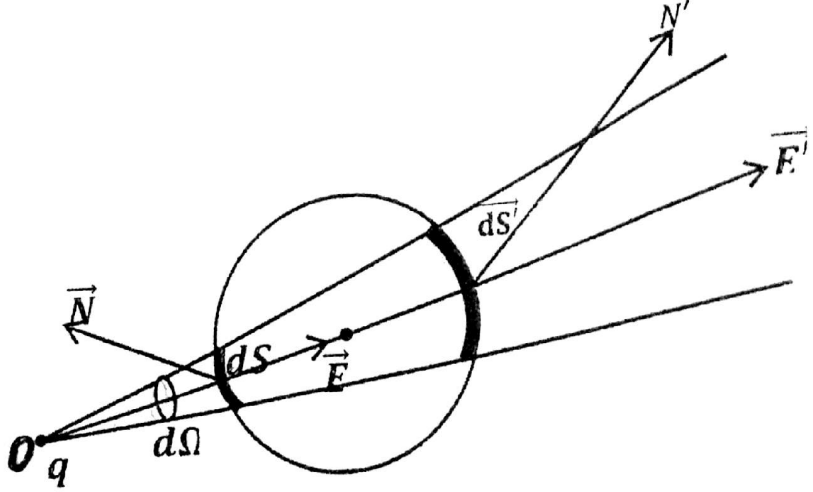
$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\int_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\,\Omega$$

Ω est l'angle solide sous lequel de O on voit le contour (C) .

d) Flux à travers une surface fermée S : Théorème de Gauss

- **La charge q est placé à l'extérieur de S**

Scanned by CamScanner



Le cône élémentaire de sommet O découpe sur S deux surfaces élémentaires dS et dS' vues sous le même angle solide élémentaire $d\Omega$.

Sachant que le flux élémentaire à travers une surface dS est : $d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\,\Omega$

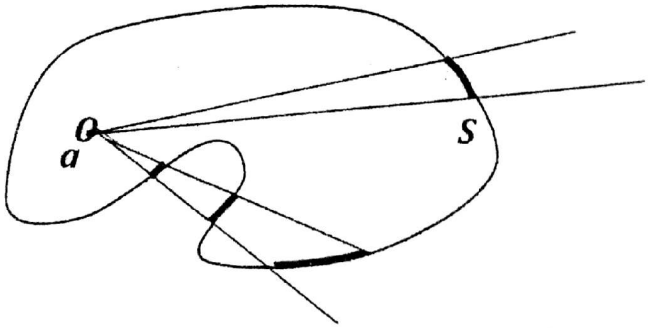
Les flux sortant par dS et dS' sont égaux en valeur absolue et de signe contraires :

$$d\phi + d\phi' = 0 \qquad car \qquad \vec{N} = -\vec{N}'$$

Toute la surface S peut être découpée en couples de surfaces dS et dS'.

Le flux total sortant de la surface S fermée est donc nul. $\phi = 0$

- **La charge ponctuelle q est placée à l'intérieur de S.**



Toutes les demi-droites issues de O coupent la surface S un nombre impair de fois.
À un cône d'angle solide Ω correspond un nombre impair de flux élémentaires sortants qui s'annulent deux à deux sauf le dernier.

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\,\Omega$$

Le flux total sortant de l'ensemble des cônes de sommet O est :

Scanned by CamScanner

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\int d\Omega$$

$\int d\Omega = 4\pi$ est l'angle solide qui correspond à tout l'espace autour de O.

$\phi = \frac{q}{\varepsilon_o}$ quelle que soit la position de q à l'intérieur de S.

Pour un ensemble de charges $q_1, q_2, \ldots\ldots\ldots, q_i$ l'addition des flux donne :

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon_o}\Sigma q_i$$

Cette relation reste valable pour des distributions continues de charges placées à l'intérieur de S .

- **Théorème de Gauss**

« Le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée S est égal au quotient par ε_o de la somme algébrique des charges situées à l'intérieur de S .»

$$\phi = \iint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$$

Remarque :

1. Du point de vue physique, le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrique et ses « **Causes** » qui sont les charges électriques.
2. Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile pour calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ lorsqu'il possède des propriétés de symétrie particulières.
   Il suffit de trouver une surface S qui respecte les propriétés de symétrie du champ appelée « **surface de Gauss** » et permettant de calculer facilement le flux du champ $\vec{E}$.

Applications :

- Calcul du champ électrostatique créé par un plan uniformément chargé
- Calcul du champ électrostatique créé par une boule (sphère pleine uniformément chargée).

Scanned by CamScanner

2. Equation de Poisson et de Laplace

Soit une région de l'espace où des charges sont réparties en volume.

Le théorème de Gauss va nous permettre d'établir une relation locale entre le champ en un point M et la densité volumique ρ en ce même point.

Soit une surface (S) fermée, contenant une charge Q répartie uniformément dans le volumique v où ρ est la densité volumique.

Le théorème de Gauss donne :

$$\phi = \iint_{(S)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o}\iiint_v \rho dv$$

Théorème de green ou de la divergence

$$\iint_{(S)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iiint_v div\,\vec{E}\,.dv$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}} \quad \text{Equation de Poisson}$$

$$div\,\vec{E} = div\left(-\overrightarrow{grad}\,V\right) = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$$

$$= -\Delta V$$

ΔV Est le « Laplacien de la fonction scalaire V».

L'équation de Poisson devient : $-\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$

Dans un espace dépourvu de charges mais où existe un champ $\vec{E}$ on a :

$$div\vec{E} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta V = 0 \quad : \textbf{Equation de Laplace}$$

3. Caractère conservatif du flux du champ

- **Définition**

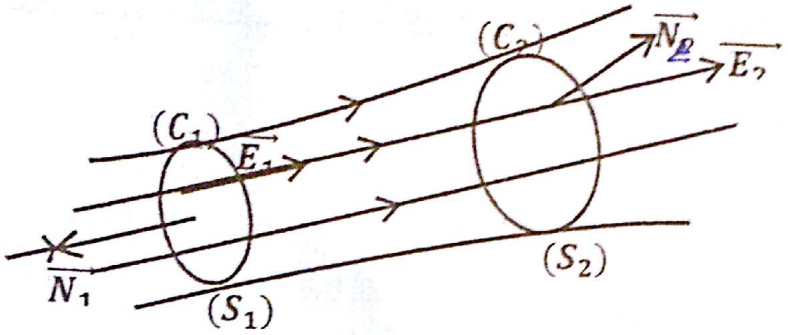
Le flux d'un champ vectoriel quelconque est conservatif lorsque le flux sortant de toute surface fermée est nul.

Scanned by CamScanner

D'après le théorème de Gauss le flux électrostatique est conservatif dans toute région de l'espace où il n'y a pas de charge.

- **Conservation dans un tube de champ**

Soit un tube de champ situé dans un espace ne contenant pas de charges.



Les lignes de champ s'appuient sur les contours fermés (C_1) et (C_2)

$$\Phi_{\text{tube}} = \Phi_{\substack{\text{Surface} \\ \text{latérale}}} + \Phi_{\substack{\text{Entrant} \\ \text{par } S_1}} + \Phi_{\substack{\text{Sortant} \\ \text{par } S_2}}$$

$$(\overrightarrow{N_1} = -\overrightarrow{N_2}) \qquad = \iiint_v \frac{\rho}{\varepsilon_o} dv = 0 \qquad car\ \rho = 0$$

$$\emptyset_{\text{surface latérale}} = 0$$

$$\Longrightarrow \Phi_{\substack{\text{Entrant} \\ \text{par } S_1}} = \Phi_{\substack{\text{Sortant} \\ \text{par } S_2}} \Longrightarrow$$ Toutes les sections du tube sont traversées par le même flux.

Scanned by CamScanner

V. Propriétés des conducteurs en équilibre

1. Conducteur en équilibre

On dit qu'un conducteur est en équilibre lorsque toutes les charges libres qu'il contient sont au repos.

2. Propriétés d'un conducteur en équilibre

a) Champ électrostatique

Une charge libre q ne reste au repos que si aucune force n'agit sur elle $(\vec{F} = q\vec{E} = 0)$ c'est-à-dire lorsque le champ électrique $\vec{E}$ est nul.

b) Potentiel électrostatique

$\vec{E} = \vec{0}$ Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \implies V = cste$

Le volume du conducteur est donc équipotentiel.

La Surface limitant un conducteur en équilibre est une **surface équipotentielle**.

c) Densité volumique de charges

L'équation de Poisson :

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad entraine \qquad \rho = 0$$

Ce résultat signifie que dans un conducteur en équilibre, il y a autant de charges positives que de charges négatives.

- **Si le conducteur est chargé, la charge non compensée ne peut se trouver que sur la surface du conducteur.**

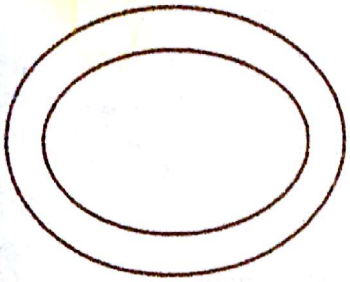
On a une distribution superficielle de charges répartie dans une couche très mince où le champ n'est pas nul (équation de Poisson : $div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$).

Ce champ est normal à la surface du conducteur.
(Sinon les charges se déplaceraient sur la surface et le conducteur ne serait pas en équilibre).

Scanned by CamScanner

d) Cas d'une cavité au sein d'un conducteur en équilibre

La cavité ne contient pas de charges.



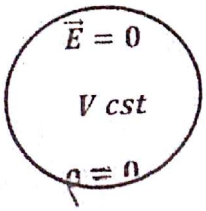
La surface intérieure est donc équipotentielle et par continuité, ce potentiel est celui du conducteur.

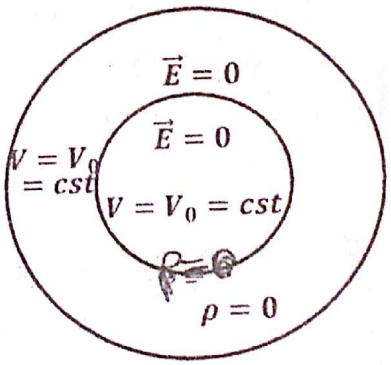
Le potentiel est constant $\Longrightarrow \vec{E} = 0$ en tout point de la cavité $\Longrightarrow$ il ne peut y avoir de charges sur la surface intérieure de la cavité.

e) Résumé des propriétés d'un conducteur en équilibre.

Dans un conducteur creux, en équilibre, dont la cavité ne contient pas de charges :

- $\vec{E} = 0$ Dans le conducteur et dans la cavité.
- Le potentiel **V** est constant en tout point du conducteur et dans la cavité.
- Seule la surface extérieure du conducteur peut porter une charge (non compensée).





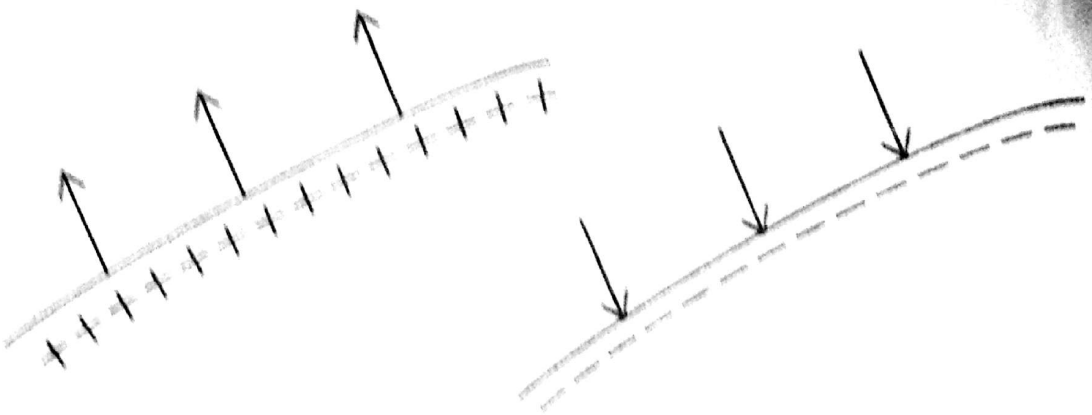
3. Champ au voisinage immédiat d'un conducteur en équilibre – théorème de Coulomb

Nous avons montré que les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

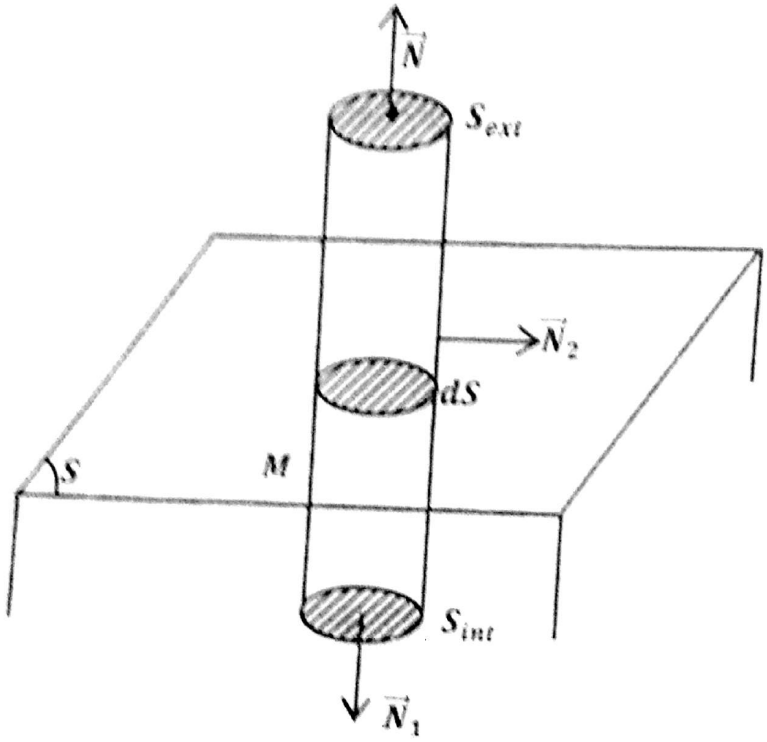
Sachant que la surface d'un conducteur en équilibre est une équipotentielle $\Longrightarrow$

Les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface du conducteur.

Scanned by CamScanner



En un point M voisin de la surface du conducteur le champ $\vec{E}$ est normal à la surface.



Considérons autour de M un élément de surface S_{ext} parallèle à la surface S du conducteur.

Considérons un tube de champ s'appuyant sur S_{ext} et découpant sur S un élément dS qui porte une charge $\sigma\, dS$.

Considérons une surface de Gauss constituée par S_{ext}, le tube et une surface rentrant à l'intérieur du conducteur S_{int}

Théorème de Gauss donne :

$$\phi = \iint_{\substack{surface \\ Gauss}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_{S_{tube}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{S_{ext}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{S_{int}} \vec{E}.\overrightarrow{dS}$$

Scanned by CamScanner

Le flux à travers :

- La surface du tube, est nul car $\vec{E} \perp \vec{N}_2$
- La surface intérieure, est nul car $\vec{E} = 0$ à l'intérieur du conducteur.

$$donc \quad \phi = E.S_{ext} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o} \iint_{S_M} \sigma dS$$

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon_o} \sigma S_M \qquad or \qquad S_M = S_{ext}$$

$$donc \qquad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \vec{N}$$

$\vec{N}$ est le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers l'extérieur.

$Si \quad \sigma > 0$, le champ est dirigé vers l'extérieur.

$Si \quad \sigma < 0$, le champ est dirigé vers l'intérieur.

4. Pression électrostatique

Une charge dq=σdS portée par l'élément dS de la surface d'un conducteur, peut être considérée comme une charge passive placée dans le champ $\vec{E}$ dû à toutes les autres charges du conducteur.

dq est donc soumise à une force $\overrightarrow{df} = dq\vec{E}$

On montre que $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

$$df = \sigma . dS . E = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS.$$

Par définition la pression est la force exercée sur une surface : Force par unité de surface.

La pression électrostatique est donc : $P = \frac{df}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$

Cette pression est en général trop faible pour arracher les charges de la surface du conducteur, mais elle peut le déformer ou le déplacer car les charges communiquent au conducteur la force électrostatique qu'elles subissent.

Scanned by CamScanner

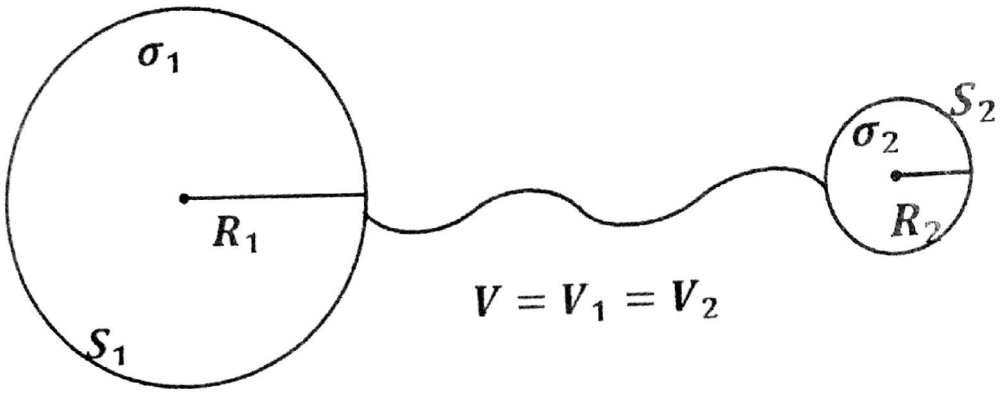
5 .Répartition des charges dans un conducteur

Pourvoir des pointes

« Les charges tendent à s'accumuler dans les régions à forte courbure ».

Considérons deux sphères chargées de rayons différents, reliées par un fil conducteur et placées à une grande distance l'une de l'autre.

On peut donc considérer que chaque sphère est isolée mais qu'elles partagent le même potentiel V.



$$\frac{1}{4\pi\mathcal{E}_o}\iint_{S_1}\frac{\sigma_1 dS}{R_1} = \frac{1}{4\pi\mathcal{E}_o}\iint_{S_2}\frac{\sigma_2 dS}{R_2}$$

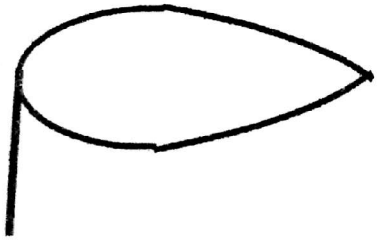
$$\frac{1}{4\pi\mathcal{E}_o}\left(\sigma_1\frac{4\pi R_1^2}{R_1}\right) = \frac{1}{4\pi\mathcal{E}_o}\left(\sigma_2\frac{4\pi R_2^2}{R_2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Donc plus le rayon est faible, c'est-à-dire la courbure est grande, et plus la densité de charge est élevée.

Pourvoir des pointes

Au voisinage d'une pointe, la courbure étant grande, la densité de charge peut être très grande.



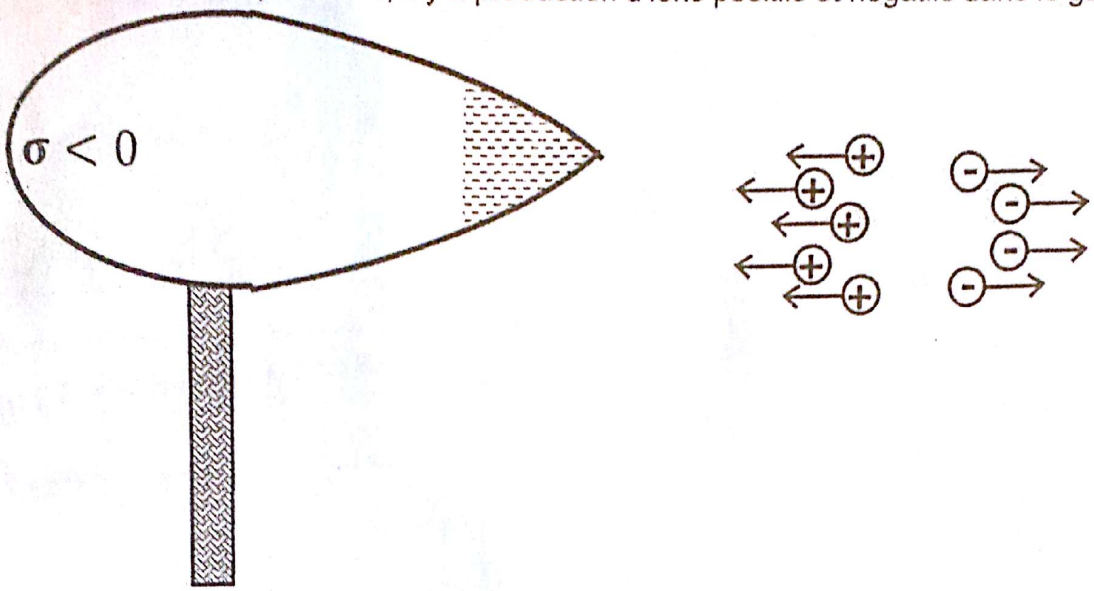
Scanned by CamScanner

La concentration des charges est très grande au niveau de la pointe.

$\Rightarrow$ D'après le théorème de coulomb, le champ à proximité d'une pointe peut avoir une très grande intensité.

Il peut être responsable d'effets connus sous le nom de « **pouvoir des pointes** »

Exemple : Lorsqu'un conducteur en pointe est en contact avec un gaz (par ex : de l'air), sous l'effet du champ intense, il y a production d'ions positifs et négatifs dans le gaz.



On observe deux effets :

- Les ions de signe contraire à σ sont attirés par la pointe et tendent à la neutraliser

  $\Rightarrow$**Décharge du conducteur.**
- Les ions de même signe sont repoussés par la pointe.

  $\Rightarrow$**Déplacement d'ions provoquant un courant gazeux appelé « Vent électrique » accompagné de phénomènes lumineux.**

4. La terre comme conducteur

La terre peut être considérée comme un énorme conducteur en équilibre au potentiel constant.

Il est commode de prendre ce potentiel égal à Zéro.

Tout conducteur en contact avec le sol, se trouve au potentiel zéro.

Scanned by CamScanner